論計舎 YouTube 動画
二重否定翻訳: Glivenko の定理

川井 新 *

2024 年 7 月 22 日

古典論理を直観主義論理に埋め込む方法である二重否定翻訳のうち、命題論理について知られている**グリベンコ** Glivenko の定理を紹介する。

古典命題論理のシークエント計算の体系 LK の推論規則を表 1で与える。この後件すなわち $\vdash$ の右側を一つの論理式に制限したものが、直観主義命題論理のシークエント計算 LJ である。

表 1　古典命題論理のシークエント計算の推論規則

$$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}\ \mathrm{Id} \qquad\qquad \frac{}{\bot \vdash \Theta}\ \bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{Weakening Left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ \text{Weakening Right}$$

$$\frac{\varphi, \varphi, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}\ \text{Contraction Left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}\ \text{Contraction Right}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, \psi, \varphi, \Pi \vdash \Delta}\ \text{Exchange Left} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}\ \text{Exchange Right}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma}\ \text{Cut}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \vdash \Sigma}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Pi, \vdash \Delta, \Sigma} \to \text{Left} \qquad \frac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi} \to \text{Right}$$

証明は主に古森、小野『現代数理論理学序説』、日本評論社、2010[3] による。また、Wikipedia[2], [1] の「二重否定翻訳」の記事も参考になる*1。

* 論計舎: squawai@ronkeisha.net

*1 前者はまだできたばかりであるが。

Theorem 1 (Glivenko)**.** 次の二つの条件は同値である。

1. $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能である。
2. $\neg\Delta, \Gamma \vdash \bot$ が LJ で証明可能である。

Proof. (2) から (1) への証明は、Δ に含まれる論理式の数に関する帰納法による。Δ が空のとき、$\Gamma \vdash \bot$ に至る LJ の証明図は LK の証明図でもある。よって公理 $\bot \vdash$ と (Cut) 規則より $\Gamma \vdash$ が LK で証明可能である。

$\Delta = \Sigma, \delta$ とする。シークエント $\neg\Sigma, \neg\delta, \Gamma \vdash \bot$ が LJ で証明可能なので、帰納法の仮定より $\neg\delta, \Gamma \vdash \Sigma$ が証明可能である。これに至る証明図を Π とする。

このとき、以下の証明図により $\Gamma \vdash \Delta$ が LK で証明可能である。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\delta \vdash \delta$}
\RightLabel{(wR)}
\UnaryInfC{$\delta \vdash \delta, \bot$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \delta, \neg\delta$}
\AxiomC{Π}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\delta, \Gamma \vdash \Sigma$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\Gamma \vdash \delta, \Sigma$}
\doubleLine
\RightLabel{(eR)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \Delta$}
\end{prooftree}
$$

(1) から (2) への証明は、$\Gamma \vdash \Delta$ に至る証明図の長さに関する帰納法による。長さが 1 のとき、すなわち、公理のときは、LK のどちらの公理の場合も、$\neg\alpha, \alpha \vdash \bot$ と $\neg\Delta, \bot \vdash \bot$ が LJ で証明可能なので、よい。

長さが 2 以上のとき、最後に使われた推論規則によって場合わけをする。

最後に使われた推論規則が ($\to$L) 規則であるとき、証明図の最後は次の形をしている:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \vdash \Theta, \alpha$}
\AxiomC{$\beta, \Delta \vdash \Lambda$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\alpha \to \beta, \Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda$}
\end{prooftree}
$$

帰納法の仮定より、$\neg\Theta, \neg\alpha, \Gamma \vdash \bot$ と $\neg\Lambda, \beta, \Delta \vdash \bot$ が LJ で証明可能である。それぞれに至る証明図を Π_1, Π_2 とする。

このとき、次の証明図により、$\neg\Theta, \neg\Lambda, \alpha \to \beta, \Gamma, \Delta \vdash \bot$ が LJ で証明可能である。

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\alpha \vdash \alpha$}
\AxiomC{$\beta \vdash \beta$}
\AxiomC{$\bot \vdash \bot$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\neg\beta, \beta \vdash \bot$}
\RightLabel{(eL)}
\UnaryInfC{$\beta, \neg\beta \vdash \bot$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\alpha \to \beta, \alpha, \neg\beta \vdash \bot$}
\doubleLine
\RightLabel{(eL)($\to$R)}
\UnaryInfC{$\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$}
\doubleLine
\RightLabel{(eL)($\to$R)}
\UnaryInfC{$\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$}
\AxiomC{Π_2}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\Lambda, \beta, \Delta \vdash \bot$}
\doubleLine
\RightLabel{(eL)}
\UnaryInfC{$\beta, \neg\Lambda, \Delta \vdash \bot$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\neg\Lambda, \Delta \vdash \neg\beta$}
\AxiomC{Π_2}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\Theta, \neg\alpha, \Gamma \vdash \bot$}
\doubleLine
\RightLabel{(eL)}
\UnaryInfC{$\neg\alpha, \neg\Theta, \Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\neg\beta \to \neg\alpha, \neg\Lambda, \Delta\neg\Theta, \Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\alpha \to \beta, \Lambda, \Delta, \neg\Theta, \Gamma \vdash \bot$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\neg\Theta, \neg\Lambda, \alpha \to \beta, \Gamma, \Delta \vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

最後に使われた推論規則が ($\to$R) 規則であるとき、証明図の最後は次の形をしている:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\alpha, \Gamma \vdash \Theta, \beta$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\Gamma \vdash \Theta, \alpha \to \beta$}
\end{prooftree}
$$

帰納法の仮定より、$\neg\Theta, \neg\beta, \alpha, \Gamma \vdash \bot$ が LJ で証明可能である。これに至る証明図を Π とする。以下の証明図により $\neg\Theta, \neg(\alpha \to \beta), \Gamma \vdash \bot$ が LJ で証明可能である:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\beta \vdash \beta$}
\RightLabel{(wL)}
\UnaryInfC{$\alpha, \beta \vdash \beta$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\beta \vdash \alpha \to \beta$}
\AxiomC{$\bot \vdash \bot$}
\RightLabel{($\to$R)}
\BinaryInfC{$\neg(\alpha \to \beta), \beta \vdash \bot$}
\RightLabel{(eL)}
\UnaryInfC{$\beta, \neg(\alpha \to \beta) \vdash \bot$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\neg(\alpha \to \beta) \vdash \neg\beta$}
\AxiomC{Π}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg\Theta, \neg\beta, \alpha, \Gamma \vdash \bot$}
\doubleLine
\RightLabel{(eL)($\to$R)}
\UnaryInfC{$\neg\Theta, \neg\beta, \Gamma \vdash \neg\alpha$}
\AxiomC{$\alpha \vdash \alpha$}
\AxiomC{$\bot \vdash \beta$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\neg\alpha, \alpha \vdash \beta$}
\RightLabel{(eL)}
\UnaryInfC{$\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$}
\RightLabel{($\to$R)}
\UnaryInfC{$\neg\alpha \vdash \alpha \to \beta$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\neg\Theta, \neg\beta, \Gamma \vdash \alpha \to \beta$}
\doubleLine
\RightLabel{(eL)}
\UnaryInfC{$\neg\beta, \neg\Theta, \Gamma \vdash \alpha \to \beta$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\neg(\alpha \to \beta), \neg\beta, \neg\Theta, \Gamma \vdash \alpha \to \beta$}
\AxiomC{$\bot \vdash \bot$}
\RightLabel{($\to$L)}
\BinaryInfC{$\neg(\alpha \to \beta), \neg(\alpha \to \beta), \neg\Theta, \Gamma \vdash \bot$}
\RightLabel{(cl)}
\UnaryInfC{$\neg(\alpha \to \beta), \neg\Theta, \Gamma \vdash \bot$}
\doubleLine
\RightLabel{(el)}
\UnaryInfC{$\neg\Theta, \neg(\alpha \to \beta), \Gamma \vdash \bot$}
\end{prooftree}
$$

$\square$

参考文献

[1] Double-negation translation wikipedia. `https://w.wiki/Aj2a`.

[2] 二重否定翻訳 wikipedia. `https://w.wiki/AhXi`.

[3] 古森雄一, 小野寛晰. 現代数理論理学序説. 日本評論社, 2010.