計算の理論入門：Grzegorczyk 階層の紹介

川井 新

squawai@ronkeisha.net
論計舎

July 9, 2024

目次

Grzegorczyk 階層とは

- 「グジェゴルチク」。
- 計算可能性理論に基づく関数の階層。
- 原始再帰的関数からなり、任意の原始再帰的関数はこの階層のあるレベルに出現する。
- 関数の増加度を扱い、階層が高くなればなるほど増加度も大きくなる。

原始再帰的関数の定義

Def. (原始再帰的関数)

初期関数とは以下の三つの関数である:

零関数 $Z(x) = 0$

後者関数 $S(x) = x + 1$

射影関数 $p_i^m(\vec{x}) = x_i$

原始再帰的関数のクラス PR を初期関数を含み、関数合成と原始再帰で閉じた最小のクラスと定める。ただし、関数合成とは、もし、$h, g_i (1 \leq i \leq m)$ から $f(\vec{u}) = h(g_1(\vec{u}), g_2(\vec{u}), \ldots, g_m(\vec{u}))$ なる部分関数をえる操作である。
原始再帰とは、g, h から $f(0, \vec{u}) = g(\vec{u}), f(x+1, \vec{u}) = h(x, \vec{u}, f(x, \vec{u}))$ をえる構成である。

原始再帰的関数は計算可能である。(cf. [1])

原始再帰的関数の例

定数 定数は原始再帰的である。

加法 $x+0=x, x+(y+1)=S(x+y)$

乗法 $x0=0, x(y+1)=xy+x$

冪乗 $x^0=1, x^{y+1}=x^y x$

モチベーション

Grzegorczyk 階層は、原始再帰的関数の増加の度合いを扱ったものである。
原始再帰的関数の増加の度合いは、入れ子になった原始再帰の深さによって見積もることができる。そこで原始再帰の深さによって、原始再帰的関数を分類することを考えたくなる。(cf, [1])

Grzegorczyk 階層の定義

Def. (Grzegorczyk 階層)

$i \in \mathbb{N}$ で添字づけられた関数族 E_i を以下で定義する。

- $E_0(x, y) = x + y$
- $E_1(x) = x^2 + 2$
- $E_n(x) = E_{n-1}^x(2)$ *(for $n > 1$)*

n 番目の *Grzegorczyk* 階層 $\mathcal{E}^n$ は、$B_n = \{Z, S, (p_i^m)_{i \leq m}\} \cup \{E_k : k < n\}$ を含み、関数合成と限定原始再帰で閉じた最小の集合である。

ただし、限定原始再帰とは、以下の再帰である:
「もし $g, h, j \in \mathcal{E}^n$ で $f(x, \vec{u}) \leq j(x, \vec{u}), f(0, \vec{u}) = g(\vec{u}), f(x+1, \vec{u}) = h(x, \vec{u}, f(x, \vec{u}))$ ならば、また $f \in \mathcal{E}^n$。」(cf. [2], [3])

Grzegorczyk 階層の性質

- $\mathcal{E}^0 \subset \mathcal{E}^1 \subset \mathcal{E}^2 \subset \dots$
- 実際、$\mathcal{E}^i$ は B_i の閉包であって、$B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots$ となるからである。
- この階層は厳密である: $\mathcal{E}^0 \subsetneq \mathcal{E}^1 \subsetneq \mathcal{E}^2 \subsetneq \dots$ ([4])
- というのも、ハイパー演算子 H_n について $H_n \in \mathcal{E}^n$ かつ $H_n \notin \mathcal{E}^{n-1}$ だからである。
- $\mathcal{E}^0$ 次は含む: $x+1, x+2, \dots$
- $\mathcal{E}^1$ は全ての加法関数を備える: $x+y, 4x, \dots$
- $\mathcal{E}^2$ は全ての乗法関数を備える: $xy, x^4, \dots$
- $\mathcal{E}^3$ は全ての指数関数を備える: $x^y, 2^{2^{2^x}}, \dots$
- $\mathcal{E}^4$ は全てのテトレーション関数を備える。

原始再帰関数との関係

$\mathcal{E}^n$ の定義は、再帰が「限定」されていて $(E_k)_{k<n}$ が明示的に導入されていることを除けば、原始再帰的関数のクラスの定義に似ており、実際、Grzegorczyk 階層は原始再帰の強さを制限しているものと見ることができる。
このことから、$\mathcal{E}^n \subset PR$ であり、したがって

$$\bigcup_n \mathcal{E}^n \subset PR$$

さらに全ての原始再帰的関数がいずれかの階層に属することも示される (cf. [4]):

$$\bigcup_n \mathcal{E}^n = PR$$

Reference I

[1] Amn.
計算理論の魔導書, 2021.
https://amntksr.booth.pm/items/1536898.

[2] Andrzej Grzegorczyk.
Some classes of recursive functions.
1953.

[3] グジェゴルチク階層 wikipedia.
https://w.wiki/Abr6.

[4] H Schwichtenberg.
He rose. subrecursion. functions and hierarchies. oxford logic guides, no. 9. clarendon press, oxford university press, oxford and new york1984, xiii+ 191 pp.
The Journal of Symbolic Logic, Vol. 52, No. 2, pp. 563–565, 1987.